Übungsstunde 6

Nachbesprechung Bonus

- Für Gegenbeispiel immer Menge angeben!
- Wenn ihr etwas für alle a,b aus $\mathbb{Z}$ zeigen wollt, könnt ihr nicht a=b+1 annehmen
- Alle Schritte begründen!

5.5 Properties of Relations ($\star$) ***(8 Points)***

Prove or disprove the following claims:

a) A relation ρ on a set A is symmetric on A if and only if ρ^2 is symmetric on A.

b) If ρ is a relation on a set A that is symmetric and antisymmetric, then it must hold $\rho = \mathsf{id}_A$.

c) Define the relations ρ_1 and ρ_2 on $\mathbb{Z}$ as

$$a\,\rho_1\,b \iff b = a + 1, \qquad a\,\rho_2\,b \iff b \equiv_2 a.$$

Then for $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$ it holds $\rho^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Hasse-Diagramme

- Wir betrachten Posets $(A, \preccurlyeq)$
- Zwei Elemente a,b sind **vergleichbar**, wenn $a \preccurlyeq b$ oder $b \preccurlyeq a$
- $a \in A$ ist **minimales Element**, wenn kein $b \in A$ mit $b \prec a$ existiert
  (kein Pfad nach unten im Hasse Diagramm)
- $a \in A$ ist **kleinstes Element**, wenn $a \preccurlyeq b$ für alle $b \in A$
  (mit allen Elementen verbunden im Hasse Diagramm, muss nicht existieren!)

Aufgabe

Wir betrachten das Poset $(\{1,2,3,4,6,12,17\}, |)$

1. Sind die folgenden Paare vergleichbar?
   a) a=3, b=4
   b) a=12, b=2
2. Zeichne das Hasse-Diagramm
3. Bestimme alle minimalen, maximalen, kleinsten und grössten Elemente
4. Bestimme alle oberen und unteren Schranken sowie die kleinste obere Schranke und die grösste untere Schranke von
   a) {1,2,3}
   b) {4}

Funktionen

Funktionen

- $f: A \to B$
- Funktion f ist eine Funktion von der Domain A zur Codomain B
- Es muss gelten:
    1. f totally defined: $\forall a \in A\ \exists b \in B: a\ f\ b$
    2. f well-defined: $\forall a \in A\ \forall b, b' \in B: (a\ f\ b \land a\ f\ b' \to b = b')$

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f: A \to B$ ist

- Injektiv: Wenn $a \neq a'$, dann gilt $f(a) \neq f(a')$
  (oder: Wenn $f(a) = f(a')$, dann gilt $a = a'$)
- Surjektiv: Für jedes $b \in B$ gilt $f(a) = b$ für ein $a \in A$
- Bijektiv: injektiv und surjektiv

Abzählbarkeit

Abzählbarkeit zeigen

Wir wollen zeigen, dass eine Menge A abzählbar ist:

- Wir definieren eine Funktion $f : A \to B$, wo B eine abzählbare Menge ist (z.B. $\mathbb{N}$, $\{0,1\}^*$)
- Zeige, dass wirklich $f(a) \in B$ gilt für alle $a \in A$
- Wir zeigen, dass diese Funktion injektiv ist

Überabzählbarkeit zeigen

Wir wollen zeigen, dass eine Menge A überabzählbar ist:

- Wir definieren eine Funktion $f: B \to A$, wo B eine überabzählbare Menge ist (z.B. $\{0,1\}^\infty$)
- Zeige, dass wirklich $f(b) \in A$ gilt für alle $b \in B$
- Wir zeigen, dass diese Funktion injektiv ist

Aufgabe

b) $(\star\star)$ Consider the set

$$S = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall x \forall y \left(x \leq y \rightarrow \left(f(x) \leq f(y) \wedge f(y) - f(x) \leq y - x \right) \right) \right\}.$$

Prove or disprove that the set S is countable.

Aufgabe

Beweise oder widerlege:

$$S = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} | \forall x \forall y (x \leq y \to f(x) \leq f(y)\}$$

ist abzählbar.